Efficienza di alette piane (esercizio 3.123 di "Fundamentals of Heat and Mass Transfer", F.P. Incropera, D.P. Dewitt, T.L. Bergman, A.S. Lavine, 6th Edition, Wiley, 2007).

Un'aletta piana, costruita in lega d'alluminio 2024 (k = 185 W/(m K)), ha uno spessore alla base t = 3 mm, ed una lunghezza L = 15 mm. La temperatura della base è T_b = 100 °C, ed è esposta ad un fluido per il quale T_∞ = 20 °C ed il coefficiente di scambio termico convettivo è pari a h = 50 W/(m2 K).

In tali condizioni, e nelle ipotesi di aletta di larghezza unitaria, si confronti il flusso termico, l'efficienza ed il volume per alette di profilo rettangolare, triangolare e parabolico.

SOLUZIONE

La soluzione del problema viene affrontata secondo due diverse modalità:

1. Approccio analitico;
2. Approccio numerico.

Per tutte le due modalità, le ipotesi semplificative sono le seguenti:

- Problema stazionario;
- Proprietà termofisiche costanti;
- Coefficiente di scambio termico convettivo uniforme;
- Scambio termico per irraggiamento assente o trascurabile.

1. *APPROCCIO ANALITICO*

Nell'approccio analitico, l'ulteriore ipotesi semplificativa consiste nel ritenere la conduzione monodimensionale, o in altre parole

$$T(x,y) \cong T(x)$$

L'efficienza di un'aletta η_f è definita dalla

$$\eta_f \equiv \frac{q_f}{q_{\max}} = \frac{q_f}{h A_f \theta_b} \tag{1}$$

dove q_f è il flusso termico scambiato dall'aletta, $q_{\max}$ è il flusso termico massimo che potrebbe venire scambiato dall'aletta se tutta la sua superficie si trovasse alla medesima temperatura della base, A_f è la superficie di scambio termico dell'aletta e $\theta_b = T_b - T_\infty$.
Nel nostro caso, operando con alette di larghezza unitaria (w =1 m), l'efficienza è espressa dalla

$$\eta_f \equiv \frac{q'_f}{q'_{\max}} = \frac{q'_f}{h A'_f \theta_b} \tag{2}$$

dove $q'_f = q_f / w$, $q'_{\max} = q_{\max}/w$ e $A'_f = A_f / w$.
Perciò, una volta nota l'efficienza, il flusso termico scambiato si ricava dalla

$$q'_f = \eta_f \, A'_f \, \theta_b \tag{3}$$

Il volume dell'aletta, per una larghezza unitaria, è dato semplicemente dalla

$$V' = A_p \tag{4}$$

dove A_p è l'area della sezione longitudinale (parallela all'asse x) dell'aletta.
L'efficienza η_f dipende, per un'assegnata geometria, dal valore di m, definito dalla

$$m = \sqrt{(hP)/(k\,A_c)} \tag{5}$$

e dal prodotto mL.
Nella (5), A_c rappresenta la sezione dell'aletta. Nel caso in cui questa non sia costante, come per le alette triangolari o paraboliche, essa viene valutata alla base dell'aletta stessa.

Le espressioni dell'efficienza, dell'area di scambio termico e dell'area della sezione per alette piane rettangolari, triangolari e paraboliche, sono riportate in figura 1.

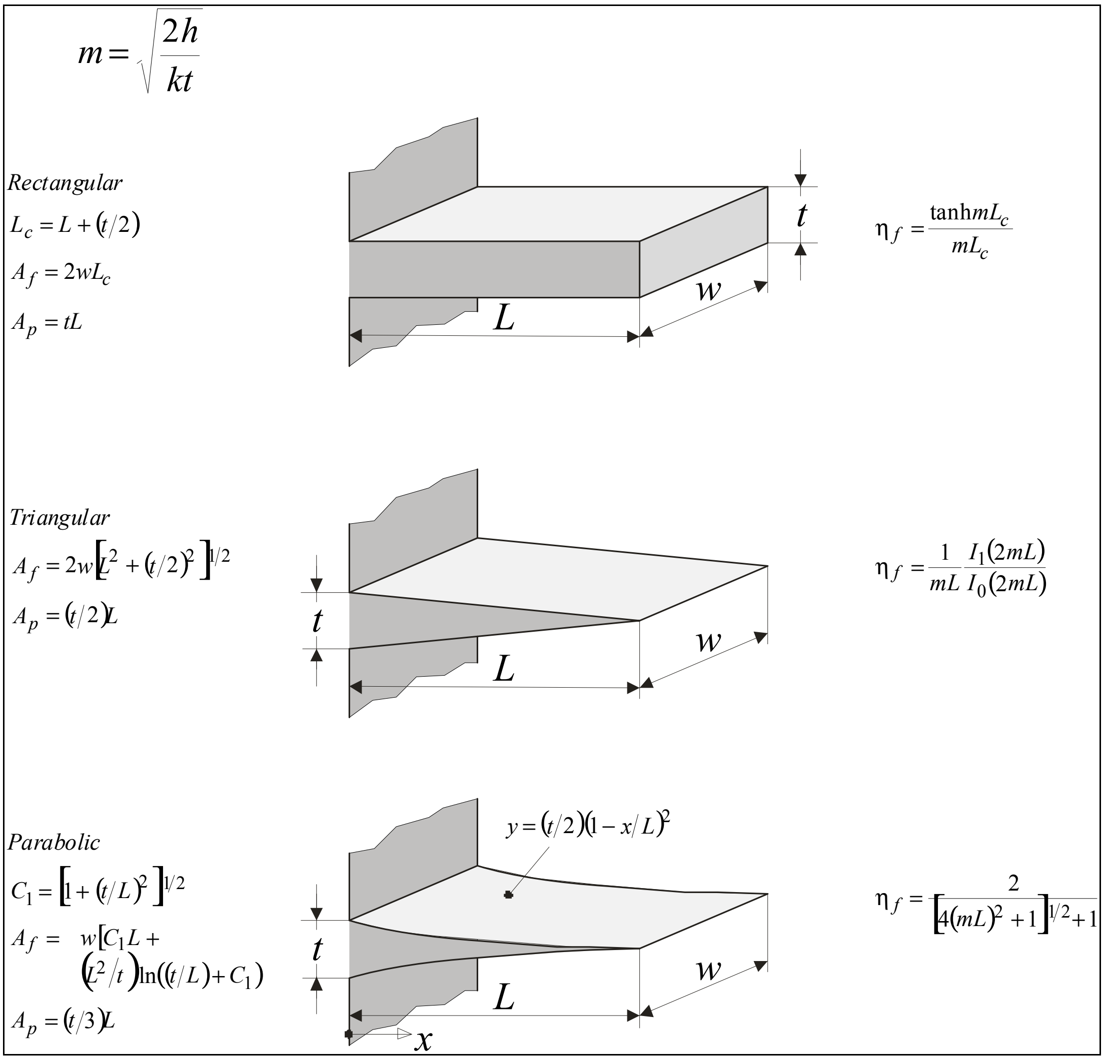

Figura 1: Efficienza di alette piane.

1.1 *Aletta rettangolare*

Per un'aletta rettangolare, nell'ipotesi di estremità adiabatica, si ha

$$\eta_f = \frac{\tanh(mL)}{mL} \tag{6}$$

Nell'ipotesi, invece, più realistica di convezione dall'estremità, si ha

$$\eta_f = \frac{1}{m}\frac{P}{A_f}\frac{\sinh(mL)+(h/mk)\cosh(mL)}{\cosh(mL)+(h/mk)\sinh(mL)} \tag{7}$$

Tuttavia, vista la complessità dell'espressione (7), è comune utilizzare la più semplice relazione (6), ma con l'avvertenza di usare, al posto della lunghezza L, una *lunghezza corretta* dell'aletta $L_c = L+t/2$ per un'aletta rettangolare[1]. La correzione è basata sull'ipotesi di equivalenza fra scambio termico dall'effettiva estremità, e scambio termico da un'aletta più lunga ma conn estremità adiabatica.
Con tale ipotesi, la (6) diventa

$$\eta_f = \frac{\tanh(mL_c)}{mL_c} \tag{8}$$

L'errore associato a quest'approssimazione è trascurabile se, per un'aletta piana[2], $(ht/k) \leq 0.0625$.
Nel nostro caso $(ht/k) = 8.1\times10^{-4} << 0.0625$, quindi l'ipotesi è ampiamente soddisfatta.
Utilizzando l'espressione approssimata (8), ed osservando che per $w >> t$ si ha

$$P = 2w + 2t \cong 2w$$
$$A_f = PL + tw \cong 2wL + tw$$
$$A_c = wt$$

si ottiene

$$m = \sqrt{(2h)/(kt)} = 13.423$$
$$L_c = 0.0165 \text{ m}$$
$$m\,L = 0.2014$$
$$m\,L_c = 0.2215$$
$$\eta_f = 0.984$$
$$A'_f = 2\,L_c = 0.033 \text{ m}$$
$$q'_f = 129.89 \text{ W/m}$$
$$V' = A_p = t\,L = 4.5\times10^{-5} \text{ m}^2$$

Utilizzando, per verifica, l'espressione esatta (7) si ottiene

---

$$\eta_f = 0.984$$

---

che non differisce da quanto trovato con la relazione approssimata.

[1] Per un'aletta a spillo di diametro D, la lunghezza corretta è $L_c=L+(D/4)$.
[2] Per un'aletta a spillo l'approssimazione è accettabile se $(hD/2k) \leq 0.0625$.

1.2 Aletta triangolare

Nel caso di aletta a sezione triangolare, il valore dell'efficienza, riportato in figura 1, vale

$$\eta_f = \frac{1}{mL}\frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)} \tag{9}$$

dove I_0 è la funzione di Bessel modificata, di ordine zero, del primo tipo, ed I_1 è la funzione di Bessel modificata, del primo ordine, del primo tipo.

Per il calcolo delle funzioni di Bessel modificate del primo tipo, si possono utilizzare le tabelle disponibili su molti testi (ad esempio, la tabella B.5 del testo "Fundamentals of Heat and Mass Transfer", di F.P. Incropera, D.P. Dewitt, T.L. Bergman, A.S. Lavine, 6th Edition, Wiley, 2007), oppure, più comodamente, la funzione `besseli(nu, Z)` disponibile in MATLAB, dove *nu* rappresenta l'ordine e Z l'argomento in generale complesso. In alternativa, può essere utilizzata la funzione *BESSEL.I(X; n)* disponibile EXCEL o OpenOffice, con X argomento ed n ordine della funzione.

Si ottiene (v. figura 1)

$$I_0(2mL) = 1.041$$
$$I_1(2mL) = 0.2055$$
$$\eta_f = 0.980$$
$$A'_f = 2\left[L^2 + (t/2)^2\right]^{1/2} = 0.03015 \text{ m}$$
$$q'_f = 118.2 \text{ W/m}$$
$$V' = A_p = (t/2)L = 2.25\times 10^{-5} \text{ m}^2$$

1.3 Aletta parabolica

Per l'aletta a sezione parabolica il valore dell'efficienza, riportato in figura 1, vale

$$\eta_f = \frac{2}{\left[4(mL)^2 + 1\right]^{1/2} + 1} \tag{10}$$

Si ottiene (v. figura 1)

$$\eta_f = 0.9625$$
$$C_1 = \left[1 + (t/L)^2\right]^{1/2} = 1.0198$$
$$A'_f = \left[C_1 L + \left(L^2/t\right)\ln\left(t/L + C_1\right)\right] = 0.0302 \text{ m}$$
$$q'_f = 116.3 \text{ W/m}$$
$$V' = A_p = (t/3)L = 1.5\times 10^{-5} \text{ m}^2$$

2. *APPROCCIO NUMERICO*

Il medesimo problema, per tutte le tre geometrie, è stato affrontato con il package agli Elementi Finiti COMSOL Multiphysics 3.3, nell'ipotesi di conduzione stazionaria bidimensionale a proprietà termofisiche costanti.
I risultati ottenuti, per ciò che riguarda η_f, q'_f e V', sono perfettamente coincidenti con i risultati analitici, e pertanto non vengono riportati.

Nelle figure seguenti sono riportati, a scopo illustrativo, il campo di temperatura (isoterme) ed il flusso termico (vettori) per le tre diverse geometrie.
Risulta evidente, in particolare confrontando il flusso termico per l'aletta rettangolare e per l'aletta triangolare, come per quest'ultima il modulo del vettore flusso termico si mantenga costante, ad indicare un migliore utilizzo del materiale.

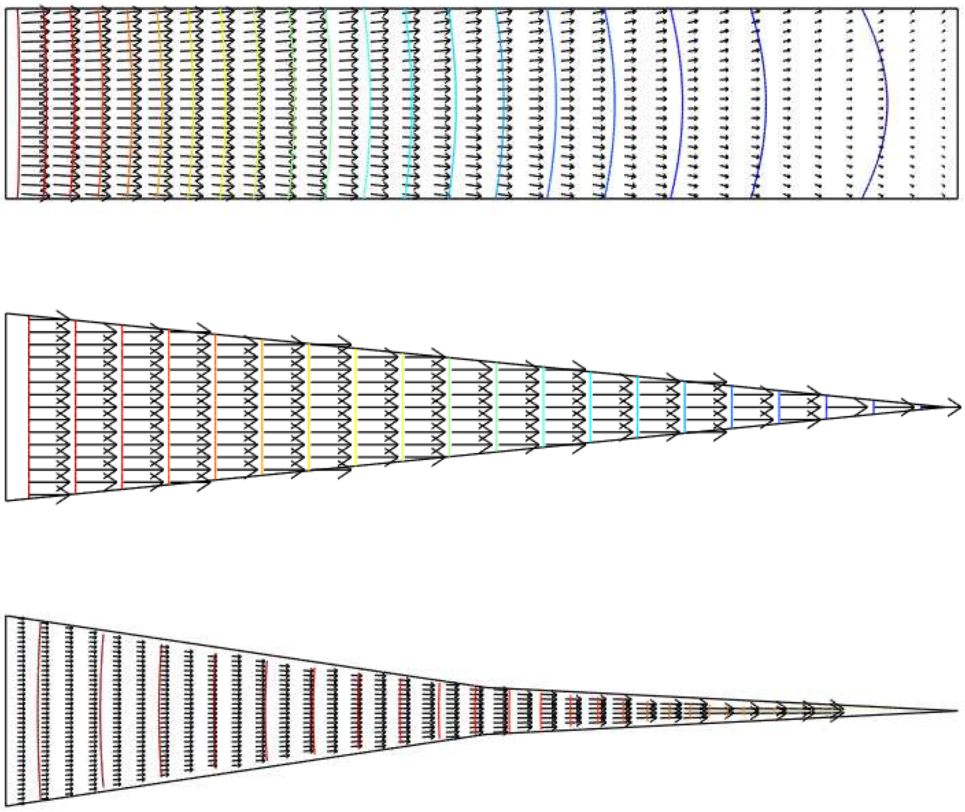

Figura 2: Campo di temperatura e flusso termico per aletta rettangolare, triangolare e parabolica.